O copoch a deformačnom kvantovaní

Deformačné kvantovanie a Poissonove zátvorky

inšpirácia: klasická mechanika $\rightsquigarrow$ kvantová mechanika

Ak je $f * g = fg + \hbar B_1(f,g) + \hbar^2 B_2(f,g) + \ldots$

asociatívny súčin na $C^\infty(M)$, tak potom

$$\{f,g\} := (f*g - g*f)/\hbar \mod \hbar$$

je Poissonova zátvorka:

Lieova zátvorka: $\{f,\{g,h\}\} + \text{c.p.} = 0$, $\{f,g\} = -\{g,f\}$

$$\{f, gh\} = \{f,g\}h + \{f,h\}g$$

Deformačné kvantovanie: Ak je $\{,\}$ Poissonova zátvorka, dá sa nájsť asociatívny súčin $\star$?

Niekedy je to ľahké: $M=\mathbb{R}^2$, $\{x,y\}=1$, $f\star g=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\hbar^n}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\frac{\partial^n g}{\partial y^n}$

(ak je (M,ω) symplektická varieta – Fedosov)

Lineárna Poissonova zátvorka (napr. $\{x,y\}=z$, $\{y,z\}=x$, $\{z,x\}=y$)

$M=\mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{g}$ Lieova algebra, kvantovanie: obalová algebra $\mathcal{U}\mathfrak{g}$

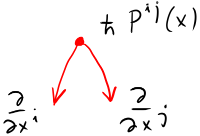
Vo všeobecnosti je to podozrivo ťažké

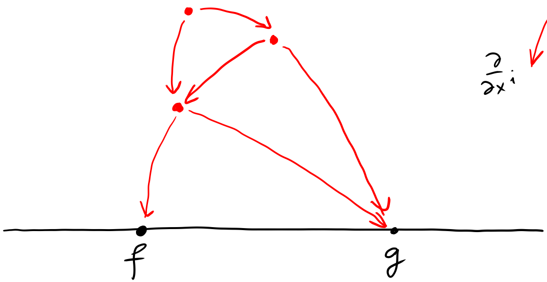
Kontsevichova zázračná formula

(súčet cez Feynmanove diagramy)

$M = \mathbb{R}^n$, $\quad \{f, g\} = P^{ij}(x) \dfrac{\partial f}{\partial x^i} \dfrac{\partial g}{\partial x^j}$, $\quad \left(P^{ij} = \{x^i, x^j\}\right)$

$$f * g = \sum_{\Gamma} c_\Gamma \, B_\Gamma(f, g)$$





$c_\Gamma \in \mathbb{R}$ je komplikovaný integrál ($\bullet$ sa hýbu cez ,

propagátory pre $\bullet \longrightarrow \bullet$ – 2dim kvant. teória poľa)

Abstraktná hrôza: copaté monoidálne kategórie

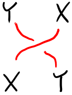
symetrická monoidálna kategória:

komutatívne asociatívne násobenie objektov

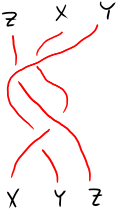
- napr. množiny ($S_1 \times S_2$), vekt. priestory ($V_1 \otimes V_2$), ...

copatá monoidálna kategória: asociat. súčin $X \otimes Y$

$\beta : X \otimes Y \cong Y \otimes X$, ale $\beta^2 \neq id$

β 

výsledný izomorfizmus závisí od copu



$\mathcal{C} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\otimes} \mathcal{C}$ funktor

β je prirodzená transformácia

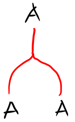
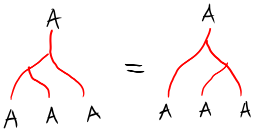
axióma: $X \otimes Y \otimes Z = X \otimes Y \otimes Z$

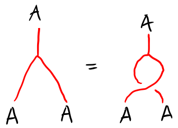
$\beta_{X, Y\otimes Z}$ $\beta_{X,Y}$ $\beta_{X,Z}$

+ izomorfizmy

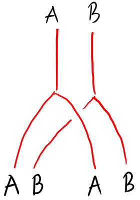
$$\begin{array}{c}(X \otimes Y) \otimes Z \\ \downarrow \wr \\ X \otimes (Y \otimes Z)\end{array}$$

Copy a nekomutatívnosť

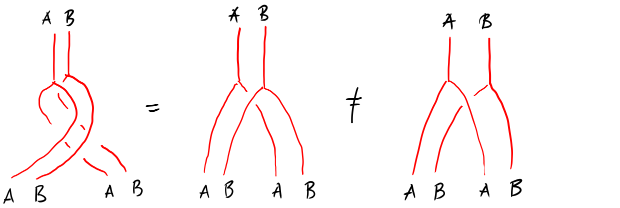
asociatívna algebra A: súčin  , 

komutatívnosť: 

tenzorový súčin algebier: A, B algebry $\rightsquigarrow$ $A \otimes B$ je algebra



ale: ak sú A, B komutatívne, $A \otimes B$ nemusí byť



„Jednoduchý" príklad

$\mathcal{C} =$ (reprezentácie $\mathbb{R}$)

objekty: (V, T), V vektor. priestor, $T: V \to V$

$$(V_1, T_1) \otimes (V_2, T_2) = (V_1 \otimes V_2,\ T_1 \otimes id + id \otimes T_2)$$

$$\beta = \beta_0 \circ \exp(\hbar\, T_1 \otimes T_2) : V_1 \otimes V_2 \to V_2 \otimes V_1$$

$A = C^\infty(\mathbb{R})$, $T = \frac{d}{dx}$

$A \hat{\otimes} A = C^\infty(\mathbb{R}^2)$ so súčinom $f * g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar^n}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \frac{\partial^n g}{\partial y^n}$

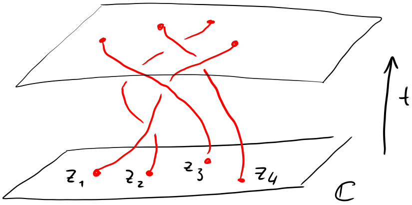
(zatiaľ je $(U \otimes V) \otimes W \xrightarrow{\sim} U \otimes (V \otimes W)$ „triviálne",

ale to sa čoskoro zmení)

Drinfeldov asociátor – ako vyrobiť copatú kategóriu

$\mathbb{C}^n_\Delta := \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i \neq z_j \ \forall i \neq j\}$

cop = krivka v $\mathbb{C}^n_\Delta$



Plochá konexia na $\mathbb{C}^n_\Delta$ (Knižnik-Zamolodčikov)

$$A = \sum_{k<l} t^{kl} \frac{d(z^k - z^l)}{z^k - z^l}$$

$dA + [A, A]/2 = 0$ ak $[t^{kl}, t^{mn}] = 0$ $\forall k, l, m, n$ rôzne

a $[t^{kl}, t^{km} + t^{lm}] = 0$ $(t^{k,l} = t^{l,k}, \ k \neq l)$

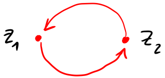
Holonómia A $\quad P\exp \int A \in \mathbb{C}\langle\langle t^{k,l}, 1 \leq k < l \leq n \rangle\rangle / \text{relácie}$

sa nezmení, ak cop zdeformujeme

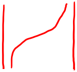
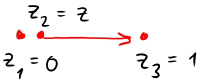
... Drinfeldov asociátor ...

najjednoduchšie prípady:

$$\left(A = t^{12}\,\frac{d(z_1-z_2)}{z_1-z_2}\right)$$

pretočenie (β)  

$\exp(\pi i\, t^{12})$

prezátvorkovanie  

$$A = \left(\frac{X}{z} + \frac{Y}{z-1}\right) dz$$

$$X = t^{12}, \quad Y = t^{23}$$

asociátor

$$\Phi(X,Y) = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \varepsilon^X \left(P\exp \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \left(\frac{X}{z} + \frac{Y}{z-1}\right) dz\right) \varepsilon^Y$$

napr. koeficient pri YX^2 je

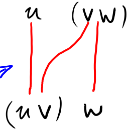
$$\int_{0<s_1<s_2<s_3<1} \frac{ds_1}{s_1-1}\,\frac{ds_2}{s_2}\,\frac{ds_3}{s_3} = -\zeta(3)$$

Ako dostať copatú kategóriu?

najdôležitejší prípad: $\mathcal{C}$ = reprezentácie $\mathfrak{g}$ ← Lieova algebra, $t \in (S^2\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$

$$t^{U,V} = \text{akcia } t \in \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g} \text{ na } U\otimes V$$

$= \exp(\pi i\, t^{U,V})$



$= \Phi(t^{U,V}, t^{V,W})$

prezátvorkovanie $(U\otimes V)\otimes W \cong U\otimes(V\otimes W)$

iné asociátory:

Koncevičove kvantovanie $\rightsquigarrow$ (Alekseev–Torossian, P.Š.–Willwacher) reálne koeficienty

Drinfeld: $\exists\ \Phi \in \mathbb{Q}\langle\langle X, Y\rangle\rangle$

Alekseev–Podkopaeva–P.Š. $\quad \sigma \in \mathrm{Aut}\,\overline{\mathbb{Q}}$, p prvočíslo,

$\sigma^{p-1}(e^{2\pi i/p^2}) \neq e^{2\pi i/p^2} \rightsquigarrow \Phi \in \mathbb{Q}_p\langle\langle X, Y\rangle\rangle$

"Kvantové grupy" (Hopfove algebry)

H Poissonova Lieova grupa : $H \times H \to H$ Poisson. zobrazenie

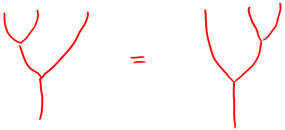
$\overset{?}{\rightsquigarrow}$ Hopfova algebra $A := C^\infty(H)$:

asociatívny súčin $*$ (deformácia pôvodného súčinu funkcií)

grupové násobenie: koasociatívny kosúčin $\Delta : A \to A \hat{\otimes} A$

$(A \hat{\otimes} A = C^\infty(H \times H))$ deformácia $(\Delta_0 f)(h_1, h_2) = f(h_1 h_2)$

koasociatívnosť :



kompatibilita : Δ je homomorfizmus algebier

Ako skvantovať Poissonove Lieove grupy

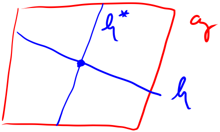
(Etingof – Každan, P.Š.)

Kedy je H Poissonova Lieova grupa:

Lieova algebra $\mathfrak{g}$ s invar. skal. súčinom $\langle , \rangle$

$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}, \mathfrak{h}^*$ izotropné podalgebry

$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*$ ako vektor. priestor



$\Longrightarrow H = G/H^* \Rightarrow G, \mathfrak{g}$ pôsobia na H

copatá kategória $\mathcal{C}$ = reprezentácie $\mathfrak{g}$ ($t = \langle , \rangle^{-1}$, asociátor)

$A_0 = C^\infty(H)$ (s pôvodným súčinom)

je komutatívna algebra v $\mathcal{C}$

tenzorovým súčinom k nekomutatívnosti

$$H = (H \times H)/H \qquad \begin{tikzcd} h_1 \bullet \arrow[r, bend left, "h"] & \bullet\, h_2 \end{tikzcd} \qquad h = h_1^{-1} h_2$$

$$A := (A_0 \hat{\otimes} A_0)^H \quad = C^\infty(H) \text{ so zdeformovaným súčinom } *$$

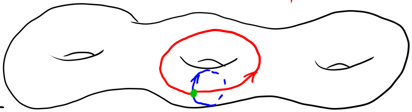
a čo $\Delta : A \to A \hat{\otimes} A$ (deformácia násobenia v grupe H)?

$$(H \times H \times H)/H \qquad \begin{tikzcd} \underset{h_1}{\bullet} \arrow[r, bend left, "h'"] \arrow[rr, bend left=60, "h"] & \underset{h_2}{\bullet} \arrow[r, bend left, "h''"] & \underset{h_3}{\bullet} \end{tikzcd} \qquad h = h' h''$$

koasociatívnosť Δ : $(H \times H \times H \times H)/H$

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left] & \bullet \arrow[r, bend left] & \bullet \arrow[r, bend left] & \bullet \end{tikzcd}$$

Ploché konexie na ploche



Σ

pretínacie párovanie

$H^1(\Sigma;\mathbb{R})$ aj $H_1(\Sigma;\mathbb{R})$

sú symplektické vektor. priestory

$$\omega([\alpha],[\beta]) = \int_\Sigma \alpha\wedge\beta$$

Atiyah – Bott: $(\mathfrak{g}, \langle,\rangle)$ $\quad \mathcal{M}_G(\Sigma) = H^1(\Sigma; G)$

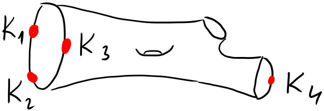
= ploché hlavné G-bundle nad Σ / izomorf.

$= \{A \in \Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g}) \mid dA + [A,A]/2 = 0\} /$ kalibrač. transf.

symplektická forma na $\mathcal{M}_G(\Sigma)$

$$\omega([\alpha],[\beta]) = \int_\Sigma \langle \alpha \stackrel{\wedge}{,} \beta\rangle \qquad \left(d\alpha + [A,\alpha] = 0\right)$$

Plochy s hranicou a Poissonove variety (Li-Bland - P. Š.)

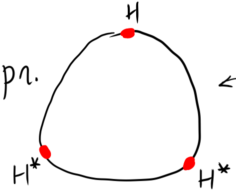


$K_i \subset G$ koizotropná podgrupa (voči $\langle , \rangle$)

kalibrač. transform. sú v K_i v

pretínacie párovanie $\rightsquigarrow$ Poissonova štruktúra na $\mathcal{M}$

napr.



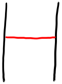
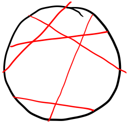
$\leftarrow$ H ako Poissonova Lieova grupa

tieto Poissonove variety sa dajú kvantovať rovnakou metódou

Kde sa ešte dajú stretnúť asociátory ?

Tamarkin: kvantovanie všetkých Poissonových variet (veľmi neexplicitné)

invarianty uzlov: cop ⇝ uzol pridaním $\cap$, $\cup$

$t^{k,l}$  ⇝ tetivový diagram 

teória čísel: koeficienty asociátora, $\mathrm{Aut}(\bar{\mathbb{Q}})$